Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 11

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeige mit Hilfe des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(1) $X^7 - 6X^5 + 9X^2 + 12X - 15 \in \mathbb{Z}[X]$

(2) $Y^3 + XY^2 + X^2Y + X^2 + X \in \mathbb{Q}[X, Y]$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $n \geq 1$ und R ein Integritätsbereich. Seien $a_0, \dots, a_n \in R$ und $a_0, a_n \neq 0$. Zeige: Das Polynom $\sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i \in R[X]$ irreduzibel ist.
Bemerkung: Man nennt $\sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i$ das *reverse Polynom*.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Drücke das symmetrische Polynom $\Delta_3 := (X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen σ_1, σ_2 und σ_3 aus.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei R ein Integritätsbereich, $\mathrm{char}(R) \neq 2$. Wie aus der Vorlesung bekannt wirkt die symmetrische Gruppe S_n auf $A := R[X_1, \dots, X_n]$ mittels $\pi.f(X_1, \dots, X_n) := f(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$. Ein Polynom $f \in A$ heißt **antisymmetrisch** wenn gilt: $\forall \pi \in S_n \colon \pi.f = \mathrm{sgn}(\pi)\, f$. Zeige:

(1) Die *Vandermonde-Determinante* $\delta_n := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} (X_i - X_j)$ ist antisymmetrisch.

(2) Jedes antisymmetrische Polynom $f \in A$ ist von der Form $f = g\delta_n$ mit einem symmetrischen Polynom g.

(3) Ist $f \neq 0$ ein antisymmetrisches Polynom, so hat f mindestens Grad $\frac{n^2-n}{2}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und $B := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Die symmetrische Gruppe S_n operiere auf B wie in Aufgabe 4. Dies induziert eine Wirkung der *alternierenden Gruppe* $A_n = \{\pi \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\pi) = 1\} \leq S_n$ auf B.

Es sei nun $B^{S_n} := \{f \in B \mid \forall \pi \in S_n \colon \pi.f = f\}$ der Ring aller Polynome, welche invariant unter S_n sind. Analog definieren wir B^{A_n}. Zeige:

$$\forall f \in B^{A_n} : \left(\exists g, h \in B^{S_n} : f = h + g\delta_n\right),$$

wobei δ_n die Vandermonde-Determinante aus Aufgabe 4 bezeichnet.

Abgabe **Dienstag**, den **12.01.2015**, in der Vorlesung.