

Mathematics. — *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel.* By M. EUWE. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

§ 1. *Unseren Betrachtungen liegt die BROUWERSche Mengendefinition* ¹⁾ *zu Grunde:*

“Eine Menge ist ein Gesetz, auf Grund dessen, wenn immer wieder eine willkürliche Nummer gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder eine bestimmte Zeichenreihe mit oder ohne Beendigung des Prozesses erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes $n > 1$ nach jeder unbeeendigten und ungehemmten Folge von $n - 1$ Wahlen, wenigstens eine Nummer angegeben werden kann, die, wenn sie als n -te Nummer gewählt wird, nicht die Hemmung des Prozesses herbeiführt. Jede in dieser Weise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist), heisst ein Element der Menge. Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge M werden wir kurz ebenfalls als die Menge M bezeichnen.”

Wir definieren:

a. $S_1, S_2 \dots S_m$, alle nach den Spielregeln möglichen Stellungen auf dem Schachbrett, in willkürlicher aber festgehaltener Reihenfolge nummeriert; dabei werden zwei Stellungen mit gleichem Figurenstand als verschieden gerechnet, wenn nicht dieselbe Partei am Zuge ist.

$$\left(m < \frac{2 \cdot (495)^2 \cdot 16 \cdot 64!}{(3!)^{12} \cdot 32!} \right). S_1 \text{ ist die Anfangstellung.}$$

b. Die Relation $S_p \rightarrow S_q$ besteht, wenn die Schachregeln den Übergang in einem Zuge von S_p auf S_q erlauben, wenn also S_q von S_p aus in einem Zuge erreichbar ist.

c. Die Wahlfreiheit i . Zu einer bestimmten S_{p^*} gibt es eine endliche Zahl $i \geq 0$ von Stellungen S_{p_i} , wofür $S_p \rightarrow S_{p_i}$ ($i = 1 \dots i; i < 150$).

Die Stellungen, wofür $i = 0$, nennen wir wahllos (patt oder matt).

d. Das Gesetz, welches die Menge S der Schachpartien definiert:

Die erste Wahl einer willkürlichen Nummer erzeugt immer S_1 , die Anfangstellung.

Wählt man bei der zweiten Wahl die natürliche Zahl p , so wird bei

¹⁾ L. E. J. BROUWER; Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I, Math. Ann. 93 (1925) p. 244.

$p \leq$ Wahlfreiheit von S_1 , die p -te der von S_1 aus erreichbaren Stellungen erzeugt, wobei diese letzteren der Grösse ihrer Indicen nach geordnet sind. Ist $p >$ Wahlfreiheit von S_1 , so wird nichts erzeugt. Im allgemeinen, wenn man bei der n -ten Wahl die natürliche Zahl p wählt, so wird bei $p \leq$ Wahlfreiheit der zuletzt von der $(n-1)$ ten Zahl erzeugten Stellung S_α , die p -te der von dieser S_α aus erreichbaren Stellungen erzeugt, wobei diese letzteren der Grösse ihrer Indicen nach geordnet sind. Ist $p >$ Wahlfreiheit von S (z. B., wenn diese Wahlfreiheit $= 0$) so wird nichts erzeugt ¹⁾.

Auf diese Weise entsteht ein Verzweigungsagglomerat, wobei von jeder Stellung eine Anzahl Zweige ausgehen, gleich ihrer Wahlfreiheit i . Die wahllosen Stellungen bilden die Endpunkte, von denen aus keine Fortschreitung des Prozesses mehr stattfindet.

Die Menge S besitzt eine Teilmenge E der endlichen Schachpartien. Ihre konstruktive Definition lautet wie bei S , nur mit der Hinzufügung, dass die Erzeugung einer S_α , die in keinerlei Art zu einer wahllosen Stellung führen kann, zur Hemmung des Prozesses und Vernichtung seines Resultates Veranlassung gibt. Wir nennen diese Eigenschaft der S_α , P_1 und werden in § 3 beweisen, dass sich für jede Stellung entscheiden lässt, ob sie diese Eigenschaft P_1 besitzt oder nicht.

Die Teilmenge U der unendlichen Schachpartien hat ebenso dasselbe Erzeugungsgesetz wie S , jedoch mit der Hinzufügung: die Erzeugung einer wahllosen Stellung oder einer Stellung, welche unbedingt zu einer wahllosen führt, ergibt Hemmung und Vernichtung. Diese Eigenschaft, unbedingt zu einer wahllosen Stellung führen zu müssen, nennen wir P_2 und wir werden in § 3 beweisen, dass jede Stellung entweder P_2 oder non- P_2 besitzt.

§ 2. Die Mächtigkeiten der Mengen S , E und U . $E \sim A^2$ (A ist die Menge der natürlichen Zahlen).

¹⁾ Laut dieser Definition werden die endlichen Schachpartien, die nicht mit patt oder matt enden, ausgeschaltet. Der Einfluss der Remisregeln (50-Züge Regel, englische und deutsche Regel) wird in § 4 untersucht.

²⁾ Man beachte den Unterschied in der intuitionistischen Mengenlehre zwischen Äquivalenz ($\equiv$) und Gleichmächtigkeit ($\sim$):

Wenn zwischen zwei Mengen M und N eine eindeutige Beziehung hergestellt werden kann, d.h. ein Gesetz, welches jedem Elemente von M ein Element von N zuordnet in solcher Weise, dass gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, und jedes Element von N einem Elemente von M zugeordnet wird, so schreiben wir $M \sim N$, und sagen, dass M und N dieselbe Mächtigkeit oder Kardinalzahl besitzen, oder gleichmächtig sind.

Zwei Mengen M und N heissen äquivalent, wenn durch ein Gesetz G_1 jedem Element von M ein solches Element von N zugeordnet ist, dass gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, und durch ein Gesetz G_2 jedem Element von N ein solches Element von M , dass gleichen und nur gleichen Elementen von N gleiche Elemente von M entsprechen, eine Eigenschaft, welche wir auch durch die Formel $m = n$ ausdrücken. Wenn wir nur wissen, dass jedem Elemente von M ein solches

Beweis: Es lässt sich bei jedem gegebenen n eine Zahl $f(n)$ bestimmen, welche anzeigt, wieviel endliche Elemente, aus n Zeichen bestehend, E enthält. Man kann also jedem Elemente von E eine natürliche Zahl zuordnen, und auch umgekehrt, jedem Elemente von A eine endliche Schachpartie, da $\sum_{i=1}^{i=r} f(i)$ für wachsendes r jede Grenze übersteigt. (Man kann bei einer gegebenen endlichen Partie willkürliche Wiederholungszüge einschalten).

$S = C$ ¹⁾ (C ist die Menge der unbeschränkt fortgesetzten Folgen von Nummern).

Beweis: Zunächst wird bewiesen $C \leq S$ ¹⁾.

a. Unter S' verstehen wir eine Teilmenge von S , wofür die Wahlfreiheit i auf allen Stufen gleich zwei ist. (Eine solche Menge ist auf viele Weisen konstruierbar; am einfachsten ist wohl die, wobei beide Parteien einen Springerzyklus auf 4 Feldern ausführen. Die Wahlen beziehen sich dann auf die zwei Bewegungsrichtungen in den Zyklen).

Nennen wir weiter V_n die Menge der n -al entwickelbaren Zahlen zwischen 0 und 1, Endwerte inklusive, so ist klar, dass

$$S' = V_2,$$

also

$$V_2 \leq S$$

Da bekanntlich:

$$C = V_2$$
 ²⁾

ist auch:

$$C \leq S.$$

b. Wenn n eine Zahl $\geq$ die maximale Wahlfreiheit darstellt, so ist

$$S \leq V_n.$$

Da $V_n = C$ (Beweis wie bei V_2), ist auch

$$S \leq C.$$

Aus a und b folgt:

$$S = C.$$

Element von N zugeordnet ist, dass gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, so schreiben wir auch $m \leq n$ oder $n \geq m$.

Vergl. L. E. J. BROUWER, l.c., p. 247 und 252.

¹⁾ Vergl. die Fussnote Seite 3.

²⁾ Der Beweis für diesen Satz sei hier kurz angegeben:

Wenn das Element $a_1 a_2 a_3 \dots$ von C der dual entwickelbaren Zahl

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1 + a_2}} + \frac{1}{2^{a_1 + a_2 + a_3}} + \dots, \text{ entspricht}$$

so werden alle Elemente von C den Elementen von V_2 eineindeutig zugeordnet, wobei jedoch das Element 0 von V_2 unbenutzt bleibt. Da aber V_2 mehrere mit A gleichmächtige abtrennbare Teilmengen besitzt, ist folglich $C = V$.

(Vergl. L. E. J. BROUWER, l.c., p. 249 und 251).

Auf gleiche Weise geht hervor, dass $U = C$.

Der Beweis $U \neq C$ gelingt nicht; wohl können wir eine Teilmenge U_1 von U konstruieren, welche gleichmächtig ist mit C .

U_1 hat das Erzeugungsgesetz von U mit der Hinzufügung:

Die Erzeugung von einer Stellung, welche entweder sofort (= Eigenschaft P_3) oder nachträglich unbedingt (= Eigenschaft P_4) zu einer ununterbrochenen unendlichen Reihe von Stellungen der Wahlfreiheit 1 führt, gibt Hemmung des Prozesses und Vernichtung seines Resultates. Wir werden in § 3 beweisen, dass sich für jede Stellung entscheiden lässt, ob sie P_3 resp. P_4 besitzt oder nicht.

Wir beweisen jetzt $U_1 \neq C$.

Beweis: Ein Element von U_1 wird bestimmt von der unendlichen Zeichenfolge $a_1 a_2 \dots a_n \dots$, wobei alle $a_p \leq i_p$ (i_p ist die Wahlfreiheit der zuletzt erzeugten Stellung). Keines dieser i_p kann $= 0$ werden, während auch eine ununterbrochene Reihe von $i_p = 1$ ausgeschlossen ist.

Wir ordnen dieses Element der Zahl:

$$\frac{a_1 - 1}{i_1} + \frac{a_2 - 1}{i_1 i_2} + \frac{a_3 - 1}{i_1 i_2 i_3} + \dots + \frac{a_n - 1}{i_1 i_2 \dots i_n} + \dots, \text{ zu.}$$

Nennen wir die Menge der auf diese Weise entstandene Zahlen I , so ist klar, dass

$$U_1 \neq I.$$

Die Zahlen der Menge I sind dual entwickelbar, und umgekehrt lässt sich für jedes Element von V_2 die entsprechenden Werte von $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ und $i_1 i_2 \dots i_n \dots$ für willkürlich grosses n ziffermässig berechnen. Da es nun unmöglich ist, dass mehr als m ¹⁾ aufeinander folgende Zahlen i den Wert 1 haben, (sonst wären auch alle weitere Zahlen i gleich 1, was, wie oben bemerkt, ausgeschlossen ist) kann die Differenz zwischen einem Anfangssegment der gegebenen dual entwickelbaren Zahl und dem zu berechnenden Anfangssegment des Elementen von I willkürlich klein gemacht werden.

Folglich ist $I \neq V_2$.

Und da $V_2 = C$ und $U_1 \neq I$ haben wir bewiesen, dass

$$U_1 \neq C.$$

Betrachten wir noch die Menge U_2 , welche wir von U abtrennen müssen, um U_1 zu bekommen. U_1 umfasst alle Elemente, in welchen eine Stellung mit der Eigenschaft P_3 vorkommt. Da, wie schon bemerkt, von jeder Stellung zu entscheiden ist, ob sie P_3 besitzt oder nicht, (Beweis siehe § 3) kann man zu jedem n ein $\varphi(n)$ bestimmen, welches angibt, wieviel Elemente nach n Zügen eine P_3 -Stellung enthalten. Da $\varphi(n)$ für wachsendes n jede Grenze übersteigt (man kann vor dem Ent-

¹⁾ m = die Zahl aller Stellungen. Siehe § 1.

stehen der P_3 -Stellung willkürliche Wiederholungszüge einschalten) ist also U_2 abzählbar unendlich:

$$U_2 = A.$$

Nennen wir die Vereinigung von E und U_2 , F (ebenfalls $= A$) so ist schliesslich S zu zerlegen in zwei Teilmengen U_1 und F , wovon wir bewiesen haben:

$$U_1 = C$$

$$F = A.$$

§ 3. Die Definition einer Vorzugsrelation (resp. einer endlichen Gruppe von Vorzugsrelationen) zu einer gegebenen S_p , welche Relation im praktischen Spiele mit dem Begriffe "bester Zug" übereinstimmt.

Zunächst wird für jede S_p ein zweiter Index definiert und zwar in folgender Art:

Die wahllosen Stellungen bekommen den Index 0 oder ∞ je nachdem der König im Schach steht oder nicht (matt oder patt).

Weiter bekommt ein S_p den Index 1, wenn wenigstens ein ν zu bestimmen ist, wofür S_{p_ν} wahllos ist ($S_p \rightarrow S_{p_\nu}$).

Wir bestimmen alle Stellungen mit Index 1 (ein endliches Problem) und von den übergebliebenen nennen wir:

$$S_p = S_{p(2)}, \text{ wenn für jedes } \nu \text{ gilt: } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(1)} \ (\nu = 1 \dots i)$$

$$S_p = S_{p(3)}, \text{ wenn wenigstens ein } \nu \text{ zu bestimmen ist, wofür } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(2)}.$$

$$S_p = S_{p(4)}, \text{ wenn für jedes } \nu \text{ gilt: } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(\varrho_\nu)} \text{ und die } \varrho_\nu \text{ folgenden Forderungen genügen: 1. } \varrho_\nu \text{ ungerade und } \leq 3. \\ 2. \text{ wenigstens ein } \varrho_\nu = 3.$$

$$S_p = S_{p(5)}, \text{ wenn wenigstens ein } \nu \text{ zu bestimmen ist, wofür } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(4)} \\ \text{während es für jedes } \nu \text{ ausgeschlossen sein muss, dass } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(r)} \\ (r \text{ ist gerade } < 4).$$

Im allgemeinen:

$$S_{p_\nu} = S_{p_\nu(2n)}, \text{ wenn für jedes } \nu \text{ gilt: } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(\varrho_\nu)} \text{ und die } \varrho_\nu \text{ folgenden Forderungen genügen: 1. } \varrho_\nu \text{ ungerade und } \leq 2n - 1. \\ 2. \text{ wenigstens ein } \varrho_\nu = 2n - 1.$$

$$S_p = S_{p(2n+1)}, \text{ wenn wenigstens ein } \nu \text{ zu bestimmen ist, wofür } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(2n)}, \\ \text{während es für jedes } \nu \text{ ausgeschlossen sein muss, dass } S_{p_\nu} = S_{p_\nu(r)}. \\ (r \text{ ist gerade } < 2n).$$

Wir setzen dieses Verfahren fort und beschränken unsere Untersuchungen immer auf die übriggebliebenen Stellungen, d.h. diejenigen Stellungen, welche noch keinen zweiten Index tragen.

Da die Zahl der Stellungen endlich ($= m$) ist, so werden wir schliesslich auf eine Zahl q ($\leq m$) kommen, derart, dass keine der übriggebliebenen Stellungen den zweiten Index q hat. Alle höheren Indices sind

dann ebenfalls ausgeschlossen, da eine $S_{\alpha(q+1)}$ nach den Definitionen das Bestehen einer $S_{\beta(q)}$ voraussetzt.

Wir definieren jetzt:

$S_p = S_{p(\infty)}$, wenn S_p keinen endlichen zweiten Index besitzen kann.

Mit Hilfe dieser Festsetzungen können wir in einer gegebenen $S_{p(l)}$ eine Vorzugsrelation definieren.

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $l = \text{gerade}$ (Der Anziehende verliert) Nach der Definition gibt es wenigstens ein p , gleich $l-1$. Die zugehörige Stellung bestimmt die Vorzugsrelation. (resp. die zugehörigen Stellungen bestimmen eine Gruppe von Vorzugsrelationen).

2. $l = \text{ungerade}$ (Der Anziehende gewinnt) Nach der Definition gibt es wenigstens ein r , wofür $S_{p_r} = S_{p_r(l-1)}$, und dieses bestimmt die Vorzugsrelation. (resp. eine Gruppe von Vorzugsrelationen).

3. $l = \text{unendlich}$ (Der Anziehende macht remis). Betrachten wir die zweiten Indices der S_{p_r} , welche aus $S_{p(l)}$ entstehen können. Einer davon ist sicher nicht endlich, sonst könnte l nicht ∞ sein. Die betreffende Stellung bestimmt dann die Vorzugsrelation (resp. eine Gruppe von Vorzugsrelationen).

(Wenn $l = 0$ (= matt), oder $l = \infty$ und die Stellung wahllos (= patt), gibt es keine Relationen, also auch keine Vorzugsrelation).

Wenn es auch auf den ersten Blick fremd erscheinen dürfte, dass sich aus den Wahlen in einer bestimmten Stellung, deren Konsequenzen sich doch bis ins Unendliche ausdehnen, immer eine herausgreifen lässt, die den Vorzug verdient, so lehrt doch eine nähere Betrachtung, dass dies gar keine Besonderheit ist, da es sich hier eigentlich um ein endliches Problem handelt.

Statt des zu jeder Stellung gehörigen Verzweigungsagglomerates können wir uns, wenn wir nach dem besten Zuge fragen, auf ein endliches Gerippe desselben beschränken. Wir dürfen nämlich in diesem Falle alle Zeichenfolgen, worin zweimal dieselbe Stellung auftritt nach der Wiederholung abbrechen und das Resultat als unentschieden betrachten. Auf diese Weise wird nicht nur die Zügezahl von jeder Partie endlich ($\leq m$), sondern auch die Zahl aller Partien. ($< \sigma^m$; σ = die maximale Wahlfreiheit).

Dass tatsächlich die Rückkehr der selben Stellung hier als remis gelten muss, folgt aus der Erwägung, dass in jeder gewonnenen oder verlorenen Stellung bei beiderseits korrekt geführtem Spiel (wie wir dies oben definiert haben), der zweite Index fortwährend um eins verringert wird, sodass eine Wiederholung der Stellung gar nicht vorkommen kann. (Der Gewinner darf nicht an den Rand der endlichen Untermenge kommen, denn dies erhöht den Index, der Verlierer kann dort nicht hinkommen: das höchste was er erreichen kann, ist, dass sein zweiter Index nur um eins verringert wird, während am Rande ein früherer d.h. höherer Index steht).

Gehen wir von einer Remisstellung $S_{p(\infty)}$ aus, und bricht eine even-

tuelle Wiederholung in der endlichen Menge den Prozess als unentschieden ab, so wäre das Resultat nicht anders gewesen, wenn wir auch das fortgesetzte unendliche Agglomerat untersucht hätten. Die beiderseits korrekte Spielweise in einer Remisstellung lässt ja den zweiten Index fortwährend ∞ .

Auf ähnlichen Erwägungen beruhen die Sätze P_1, P_2, P_3, P_4 aus den vorigen Paragraphen, deren Beweise wir noch schuldig sind.

a. Von jeder Stellung ist zu entscheiden, ob sie P_1 besitzt oder nicht. (P_1 ist die Eigenschaft einer Stellung, in keinerlei Art zu einer wahllosen führen zu können).

Beweis: Betrachten wir die endliche Untermenge einer willkürlichen S_r . Kommt hierin keine einzige wahllose Stellung vor, so muss dies auch der Fall sein in der vollständigen Menge (von S_r ausgehend), denn durch den Übergang zu dieser vollständigen Menge können, wie leicht ersichtlich, auf keine Weise neue Stellungen entstehen. Es genügt also, diese Untermenge zu untersuchen, welche Untersuchung für jede Stellung nach einer endlichen Zahl von Schritten zu dem Ergebnis P_1 oder non- P_1 führt.

b. Von jeder Stellung ist zu entscheiden ob sie P_2 besitzt oder nicht. S_2 ist die Eigenschaft einer Stellung, forciert zu einer wahllosen Stellung führen zu müssen).

Beweis: Man untersuche die endliche Untermenge einer willkürlichen Stellung S_r . Sind alle Endpunkte wahllos, so ist klar, dass die Untermenge zu gleicher Zeit die vollständige Menge darstellt und S_r also P_2 wohl besitzt.

Gibt es dagegen einen nicht wahllosen Schluss ($S_r - S_{r_1} - S_{r_2} \dots S_{r_p} \dots S_{r_a}$, wobei $S_{r_p} \equiv S_{r_a}$) so kann man die Zugfolge S_{r_p} bis S_{r_a} unendlich wiederholen, aus welchem Umstand hervorgeht, dass S_r die Eigenschaft P_2 nicht besitzt.

c. Von jeder Stellung ist zu entscheiden, ob sie P_3 besitzt oder nicht. (P_3 ist die Eigenschaft einer Stellung, unmittelbar zu einer ununterbrochenen unendlichen Reihe von Stellungen der Wahlfreiheit 1 zu führen).

Beweis: Betrachten wir die endliche Untermenge einer willkürlichen S_r . Wenn diese ausschliesslich aus Stellungen der Wahlfreiheit 1 besteht, so ist dies auch der Fall mit der vollständigen Menge und besitzt S_r somit die Eigenschaft P_3 . Kommt in dieser Untermenge jedoch eine einzige Verzweigung vor, so können wir auf non- P_3 schliessen.

d. Von jeder Stellung ist zu entscheiden, ob sie P_4 besitzt oder nicht. (P_4 ist die Eigenschaft, nachträglich, aber unbedingt, also in allen möglichen Verzweigungen, zu einer Stellung der Eigenschaft P_3 zu führen).

Beweis: Man untersuche die endliche Untermenge einer willkürlichen Stellung S_r . Besitzen alle Endpunkte die Eigenschaft P_3 , so besteht die weitere Fortsetzung ausschliesslich aus 1-wähligen Stellungen, und besitzt S_r die Eigenschaft P_4 . Gibt es dagegen einen Endpunkt, der die Eigenschaft P_3 nicht besitzt, ($S_r - S_{r_1} - S_{r_2} \dots - S_{r_p} - \dots S_{r_a}^x$, wobei $S_{r_p} \equiv S_{r_a}$) so lässt sich durch unendliche Wiederholung von S_{r_p} bis S_{r_a}

eine Zeichenfolge bilden, welche keine Stellung der Eigenschaft P_3 enthält, womit also bewiesen ist, dass S_r die Eigenschaft P_4 nicht besitzt.

§ 4. *Der Einfluss der Remisregeln auf die Unendlichkeit der Menge S.*

Die Regeln, deren Einfluss wir untersuchen werden, lauten:

50-Züge-Regel: die Partie ist remis, sobald in 50 Zügen weder ein Bauer gezogen, weder ein Stein geschlagen wurde.

Englische Regel: die Partie ist remis, sobald dreimal dieselbe Stellung entstanden ist (dieselbe Partie am Zuge).

Deutsche Regel: die Partie ist remis, wenn dreimal nacheinander dieselbe Zufolge geschehen ist.

Es ist ohne weiteres klar, dass sowohl die erste wie die zweite Regel das endlich werden der Menge zu Folge hat. Anders ist es mit der deutschen Regel, welche die Unendlichkeit der Menge S bestehen lässt, da es, wie wir beweisen, möglich ist, eine aus zwei Zeichen bestehende Folge zu konstruieren, in der keine einzige dreifache Wiederholung (von einem oder von mehreren Zeichen) auftritt.

Beweis: Nennen wir die Zeichen a und b , so lautet die Folge: $abba\ baab\ baab\ abba\ \dots$ mit dem Fortschritzungsgesetz: das $(2^n + a)$ te Zeichen soll ungleich dem a -ten sein für jedes n und für jedes $a \leq 2^n$.

Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

1. Das $(4m + 1)$ -ste Zeichen ist immer ungleich dem $(4m + 2)$ -ten.
 Das $(4m + 2)$ -te Zeichen ist immer gleich dem $(4m + 3)$ -ten.
 Das $(4m + 3)$ -te Zeichen ist immer ungleich dem $(4m + 4)$ -ten.
 Das $(4m + 4)$ -te Zeichen kann sowohl gleich als ungleich dem $(4m + 5)$ -ten sein.

2. Lassen wir die Zeichen an der 2ten, 4ten, 6ten, 8ten ... Stelle fort, so entsteht genau dieselbe Folge (Allgemeiner: wenn wir das 1ste, $(2^n + 1)$ ste u.s.w. fortlassen).

Nehmen wir jetzt an, die Folge besitze eine dreifache Wiederholung von p Zeichen und $p \geq 5$, so besitzt diese Zeichengruppe sicher zwei aufeinanderfolgende gleiche Elemente. Da das erste von zwei gleichen Zeichen immer an einer geraden Stelle steht (Eigenschaft 1), so muss p gerade sein.

Wenden wir jetzt die zweite Eigenschaft an, so ist klar, dass die Folge ausser der sich wiederholenden Zeichenfolge von p Termen, noch eine Gruppe von $1/2 p$ Termen besitzt, welche sich ebenfalls dreimal wiederholt. Eine Wiederholung von p Termen ($p \geq 5$) bringt immer eine Wiederholung von $1/2 p$ Termen mit sich. Es bleibt also noch zu beweisen, dass eine Wiederholung von weniger als 5 Termen ausgeschlossen ist.

Für $p = 2$ oder $p = 4$ wenden wir die Eigenschaft 2 noch einmal resp. zweimal an und kommen für $p = 1$ zu einem Widerspruch: das Fortschritzungsgesetz erlaubt nicht, dass nacheinander drei gleiche Zeichen vorkommen.

Betrachten wir also schliesslich $p=3$. Es gibt vier Möglichkeiten:

4m Termen					
.....	$xy\ zx\ yz\ xy\ z\ \dots$				Aus Eig. 1 folgt sowohl $y=z$ als auch $y \neq z$
.....	$\dots x\ yz\ xy\ zx\ yz\ \dots$				„ „ „ „ $x=y$ „ „ $x \neq y$
.....	$\dots xy\ zx\ yz\ xy\ z\ \dots$				„ „ „ „ $x=y$ „ „ $x \neq y$
.....	$\dots x\ yz\ xy\ zx\ yz\ \dots$				„ „ „ „ $x=z$ „ „ $x \neq z$

Hiermit ist der Beweis geliefert.

Da a und b willkürliche Züge oder Zugfolgen vorstellen, bleiben die Betrachtungen der §§ 1, 2, 3 auch mit der deutschen Regel gültig, abgesehen von einigen unbedeutenden Abänderungen.

§ 5. Nachdem ich die vorangehenden Untersuchungen beendet hatte, erfuhr ich durch Dr. NEUMANN von zwei anderen Arbeiten, welche über diesen Gegenstand handeln, und zwar:

E. ZERMELO: Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels (Proceedings of the fifth international Congress of Mathematics, Cambridge 1912, S. 501—504, Vol. II).

DÉNÈS KÖNIG: Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche (Mitteilungen der Universität Szeged 1927, Tom. Fasc. II—III, Seite 125—128) mit einem Zusatz von E. ZERMELO (l.c. Seite 129—130).

ZERMELO untersucht, wie eine Position beschaffen sein muss, damit Weiss, wie Schwarz auch spielt, den Gewinn in r Zügen erzwingen kann.

In dem genannten Zusatze beweist ZERMELO noch, dass, wenn der Sieg in einer gegebenen Stellung zu erzwingen ist, dies auch in einer begrenzten Zügezahl möglich sein muss. Da der erste Teil des § 3 von unserer Untersuchung ungefähr mit den Ausführungen ZERMELO's übereinstimmt, hätte ich diesen Teil meines Aufsatzes weglassen können. Ich habe dies aber nicht getan, erstens weil er in ganz anderer Form dargestellt ist und zweitens um den Kern der Lösung, die Reduktion zu einem endlichen Problem, besser zu beleuchten.

DÉNÈS KÖNIG definiert den Begriff "Gewinnposition" und beweist, dass wenn in einer Position q der Gewinn für Weiss zu erzwingen ist, dies auch in weniger als N Zügen möglich sein muss. (N ist eine von q abhängige endliche Zahl). Er definiert damit auch den bestmöglichen Zug in einer gegebenen Position.

Bemerkenswert ist, dass die Ausführungen von DÉNÈS KÖNIG gültig bleiben, auch wenn die Menge aller Positionen nicht mehr endlich ist. (Als Beispiel gibt DÉNÈS KÖNIG ein unendliches Brett; wobei die Gangart wie auf dem endlichen Brette beschränkt ist.)

Der gegebene Beweis ist aber nicht konstruktiv, d.h. es wird keine Methode angezeigt, mit Hilfe deren der Gewinnweg, wenn überhaupt möglich, in endlicher Zeit konstruiert werden kann. Wohl lässt sich für jede Position dieses generalisierten Schachspiels festsetzen, ob ein Matt

in n Zügen möglich ist oder nicht. Eine obere Grenze für n besteht aber nicht und bei der systematischen Untersuchung der Stellungen muss also immer mit drei Möglichkeiten gerechnet werden:

primo: Es lässt sich beweisen, dass ein Matt in einer endlichen Zügezahl erreichbar ist.

secundo: Es lässt sich beweisen, dass ein Matt von der gegebenen Stellung aus unmöglich ist.

tertio: (non exclusum!) Weder das Matt, noch das unmöglich sein eines Matts ist bewiesen, und man hat keine Gewissheit, ob die Fortsetzung der Untersuchung je über das eine oder das andere eine Entscheidung bringen wird.
